3

이차방정식

하늘로 쏘아 올린 물체가 땅에 떨어질 때까지 걸리는 시간이나 넓이가 주어진 직사각형 모양의 땅의 둘레의 길이를 이차방정식을 이용하여 구할 수 있다. 이와 같이 우리 주변에는 이차방정식을 활용하여 문제를 해결하는 경우가 많이 있다.

기원전 2000년경 바빌로니아인들은 특수한 경우의 이차방정식을 풀 수 있었으며 그리스인들은 도형을 이용하여 이차방정식을 해결하였다. 이차방정식의 풀이 방법을 체계적으로 정리한 수학자 알콰리즈미(Al-Khwarizmi, 780?~850?)는 『이항과 소거의 과학(al-jabr wa al-muqabala)』이라는 책을 통해 양의 근을 갖는 일차방정식과 이차방정식의 모든 경우를 다루었다.

[출처] • C. B. Boyer · U. C. Herzbach (양영오 · 조윤동 역), 『수학의 역사 (상)』
• H. Eves (이우영 · 신항균 역), 『수학사』

이 단원에서는 이차방정식의 뜻을 알고, 다양한 이차방정식의 풀이 방법과 이를 활용하여 문제를 해결하는 방법을 배운다.

준비해 볼까?

1 다음 일차방정식을 푸시오.

(1) $\frac{1}{2}x-3=0$ (2) $4(x+3)=6+x$

2 다음 수의 제곱근을 구하시오.

(1) 4 (2) 10

(3) 25 (4) 40

3 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $2x^2-6x$ (2) x^2+2x+1

(3) x^2-9 (4) $x^2+10x-39$

4 다음 식이 완전제곱식이 되도록 □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

(1) $x^2+8x+\square$ (2) $x^2+\square x+25$

이야기로 여는 수학

3.0 방정식은 문제 해결의 유용한 수단

생활 주변의 문제나 과학적인 문제를 해결하기 위한 중요한 수단 중의 하나가 방정식입니다. 예를 들어, 가로의 길이가 세로의 길이보다 5 m 더 긴 직사각형 모양의 꽃밭을 만든다고 할 때, 그 넓이가 주어진다면 가로의 길이와 세로의 길이는 방정식을 이용하여 구할 수 있습니다.

또한, 과학자 갈릴레이(Galilei, Galileo, 1564~1642)는 공기의 저항을 생각하지 않으면 모든 물체는 종류나 크기에 상관없이 같은 속도로 떨어진다는 법칙을 알아냈습니다. 그 후 과학자들은 이 법칙을 이용하여 물체를 떨어뜨렸을 때, 물체가 지상으로 떨어질 때까지 걸린 시간을 방정식을 세워 구할 수 있게 되었습니다. 이 방정식을 응용하면 스카이다이빙을 할 때, 항공기에서 뛰어내려 낙하산을 펴야 하는 안전 고도까지 내려오는 데 걸리는 시간도 구할 수 있습니다.

이와 같이 방정식은 자연과 우주의 본질을 관찰하고, 미지의 세계를 예측할 수 있게 해주는 인류 문명 발달의 원동력입니다.

[출처: 위르겐 브뤽(정인회 역), 『누구나 수학』]

- 가로의 길이가 세로의 길이보다 5 m 더 긴 직사각형 모양의 꽃밭을 만든다고 하자. 세로의 길이가 x m이고 꽃밭의 넓이가 104 m^2일 때, 꽃밭의 넓이를 등식으로 나타내 보자.

태도 및 실천

- 갈릴레이가 발견한 법칙에 대하여 조사하여 발표해 보자.

3.1 이차방정식과 그 해

학|습|목|표

- 이차방정식의 뜻을 안다.
- 이차방정식의 해의 의미를 이해한다.

학|습|요|소

- 이차방정식

생각 열기

황금비

수학✚미술

황금비는 주어진 길이를 조화롭게 나누는 비로, 다음 그림과 같이 선분 AC 위의 한 점 B에 대하여

$$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{BC} : \overline{AC}$$

를 만족시키는 비입니다.

A　B　C

황금비는 시각적으로 가장 안정된 비율이라고 여겨지기 때문에 예술 작품과 건축물에서 쉽게 찾아볼 수 있습니다. 황금비를 식으로 어떻게 나타낼지 생각해 봅시다. [출처: 이광연, 『미술관에 간 수학자』]

1.618
1

활동 1 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=x$라고 할 때, 황금비를 x에 관한 등식으로 나타내 보자.

A　1　B　x　C

활동 2 **활동 1**에서 구한 등식을 (x에 관한 식)$=0$의 꼴로 나타내 보자.

생각 1

황금비를 어떤 방정식으로 나타낼 수 있나요?

생각 열기에서 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=x$라고 할 때, 황금비는

$$1 : x = x : (x+1)$$

이다. 따라서 $x^2=x+1$이 성립한다. 이 식에서 우변의 항을 좌변으로 이항하면

$$x^2-x-1=0$$

이다.

이와 같이 방정식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리한 식이

$$(x\text{에 관한 이차식})=0$$

의 꼴로 나타나는 방정식을 x에 관한 **이차방정식**이라고 한다.

이차방정식
$x^2-x-1=0$
x에 관한 이차식

일반적으로 x에 관한 이차방정식은

$$ax^2+bx+c=0\ (a,\ b,\ c\text{는 상수},\ a\neq0)$$

의 꼴로 나타낼 수 있다.

예 (1) $x^2-4x-3=0$, $-2x^2+3x=0$, $x^2-5=0$은 이차방정식이다.
(2) $x+7=0$, x^2-2x-3, $x^2+3x+9=x^2$은 이차방정식이 아니다.

문제 1 다음에서 이차방정식을 모두 찾으시오.

(1) $2x^2=(x-3)^2$

(2) $2x(x+1)=3+2x^2$

(3) $(x+3)(x-3)=9$

(4) $5x^2-2=x^3+1$

생각 2 이차방정식이 참이 되게 하는 미지수의 값을 어떻게 찾을 수 있나요?

x의 값이 -2, -1, 0, 1, 2일 때, 이차방정식 $x^2-x-2=0$을 참이 되게 하는 x의 값을 찾기 위해 x에 -2, -1, 0, 1, 2를 각각 대입하면 다음 표와 같다.

x	이차방정식 $x^2-x-2=0$		참/거짓
	좌변의 값	우변의 값	
-2	$(-2)^2-(-2)-2=4$	0	거짓
-1	$(-1)^2-(-1)-2=0$	0	참
0	$0^2-0-2=-2$	0	거짓
1	$1^2-1-2=-2$	0	거짓
2	$2^2-2-2=0$	0	참

위의 표에서 이차방정식 $x^2-x-2=0$은 $x=-1$ 또는 $x=2$일 때만 참이 됨을 알 수 있다.

이와 같이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$을 참이 되게 하는 미지수 x의 값을 이 이차방정식의 해 또는 근이라 하고, 이차방정식의 해를 모두 구하는 것을 이차방정식을 푼다고 한다.

| **참고** | 이차방정식에서 미지수 x에 대한 특별한 말이 없을 때에는 x의 값의 범위를 실수 전체로 생각한다.

예제 1

x의 값이 0, 1, 2, 3, 4일 때, 이차방정식 $x^2-5x+4=0$의 해를 모두 구하시오.

풀이 | 이차방정식 $x^2-5x+4=0$에서 좌변의 값은

$x=0$일 때, $0^2-5\times0+4=4\neq0$

$x=1$일 때, $1^2-5\times1+4=0$

$x=2$일 때, $2^2-5\times2+4=-2\neq0$

$x=3$일 때, $3^2-5\times3+4=-2\neq0$

$x=4$일 때, $4^2-5\times4+4=0$

따라서 구하는 해는 $x=1$ 또는 $x=4$이다.

답 $x=1$ 또는 $x=4$

문제 2 다음 [ ] 안의 수가 주어진 이차방정식의 해인지 아닌지 말하시오.

(1) $x^2+2x-3=0$ $[-3]$

(2) $2x^2-x-1=0$ $[-1]$

문제 3 x의 값이 -2, -1, 0, 1, 2일 때, 다음 이차방정식의 해를 모두 구하시오.

(1) $x^2+x=0$

(2) $x^2-3x+2=0$

수학 집 짓기

이 시간에 배운 내용

스스로 해결하기

1

다음 [ ] 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) 방정식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리한 식이

(x에 관한 [ ])$=0$

의 꼴로 나타나는 방정식을 x에 관한 이차방정식이라고 한다.

(2) 일반적으로 x에 관한 이차방정식은

[ ](a, b, c는 상수, $a\neq0$)

의 꼴로 나타낼 수 있다.

2

다음에서 이차방정식을 모두 찾으시오.

(1) $x^2+x=x^2-3$

(2) $(x+1)(x-2)=0$

(3) $3x^2-4x+2$

(4) $2x(x-4)=x+1$

3

x의 값이 -1, 0, 1, 2, 3일 때, 이차방정식 $x^2-5x+6=0$의 해를 모두 구하시오.

4

다음 보기에서 [ ] 안의 수가 주어진 이차방정식의 해인 것을 모두 고르시오.

보기

ㄱ. $x^2-16=0$ [-4]

ㄴ. $x^2+x-6=0$ [-2]

ㄷ. $2x^2+x-3=0$ [1]

ㄹ. $(x-1)(x-5)=0$ [5]

5

이차방정식 $x^2+ax-12=0$의 한 근이 $x=-2$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

6 추론

$2ax^2-3x+4=6x(x+1)$이 x에 관한 이차방정식이 되기 위한 상수 a의 값의 조건을 구하시오.

7 과정을 다지는 문제

정n각형의 대각선의 개수는 $\frac{n(n-3)}{2}$이다. n의 값이 4, 5, 6, 7, 8, 9일 때, 정n각형의 대각선의 개수가 20이 되게 하는 n의 값을 구하고, 그 풀이 과정을 쓰시오.

3.2 인수분해를 이용한 이차방정식의 풀이

학|습|목|표

• 인수분해를 이용하여 이차방정식을 풀 수 있다.

학|습|요|소

• 중근

생각 열기

두 수의 곱이 0이 되는 경우

두 수 a, b에 대하여 다음 중에서 a와 b의 곱이 0이 되는 경우를 생각해 봅시다.

(1) $a=0$, $b=0$

(2) $a=0$, $b\neq0$

(3) $a\neq0$, $b=0$

(4) $a\neq0$, $b\neq0$

활동 1 $ab=0$인 경우를 모두 말해 보자.

생각 1

두 식의 곱이 0인 경우는 어떤 경우일까요?

생각 열기에서와 같이 두 수 a, b에 대하여 $ab=0$이면

(1) $a=0$, $b=0$

(2) $a=0$, $b\neq0$

(3) $a\neq0$, $b=0$

의 세 가지 중 어느 하나가 성립한다.

이것을 통틀어 $a=0$ 또는 $b=0$이라고 한다. 즉,

$ab=0$이면 $a=0$ 또는 $b=0$

이다.

두 수 a, b에 대하여 $a=0$ 또는 $b=0$이면 $ab=0$이다.

이와 마찬가지로 두 식 A, B에 대하여

$AB=0$이면 $A=0$ 또는 $B=0$

이다. 또, $A=0$ 또는 $B=0$이면 $AB=0$이다.

즉, '$AB=0$'과 '$A=0$ 또는 $B=0$'은 같은 뜻이다.

이 성질을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있다.

예제 1

이차방정식 $(x+4)(2x-5)=0$을 푸시오.

풀이 | $(x+4)(2x-5)=0$에서

$$x+4=0 \text{ 또는 } 2x-5=0$$

따라서 주어진 이차방정식의 해는

$$x=-4 \text{ 또는 } x=\frac{5}{2}$$

답 $x=-4$ 또는 $x=\frac{5}{2}$

문제 1 다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x(x-1)=0$

(2) $(x-3)(x+8)=0$

(3) $(x+5)(2x-1)=0$

(4) $(2x+3)(3x-7)=0$

생각 2 인수분해를 이용하여 이차방정식을 어떻게 풀 수 있나요?

주어진 이차방정식을 $ax^2+bx+c=0$의 꼴로 정리한 식에서 좌변을 두 일차식 A와 B의 곱으로 인수분해할 수 있는 경우, $AB=0$이면 $A=0$ 또는 $B=0$임을 이용하여 그 이차방정식을 풀 수 있다.

예를 들어 이차방정식 $x^2-3x-4=0$의 좌변을 인수분해하면

$$(x+1)(x-4)=0$$

이다. 이 식에서

$$x+1=0 \text{ 또는 } x-4=0$$

이므로 주어진 이차방정식의 해는

$$x=-1 \text{ 또는 } x=4$$

이다.

문제 2 다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x^2-9=0$

(2) $x^2+2x-8=0$

(3) $2x^2-3x-2=0$

(4) $3x^2+5x-2=0$

예제 2

이차방정식 $x^2+7x=5(x+3)$을 푸시오.

풀이 | 괄호를 풀면 $x^2+7x=5x+15$

모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하면 $x^2+2x-15=0$

좌변을 인수분해하면 $(x+5)(x-3)=0$

이 식에서 $x+5=0$ 또는 $x-3=0$

따라서 주어진 이차방정식의 해는

$x=-5$ 또는 $x=3$

확인 | $x=-5$와 $x=3$을 $x^2+7x=5(x+3)$에 각각 대입하면 (좌변)=(우변)이므로 $x=-5$ 또는 $x=3$은 주어진 이차방정식의 해이다.

답 $x=-5$ 또는 $x=3$

문제 3 다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x^2+12=8x$

(2) $x(x-4)=5$

(3) $(x-4)(x+3)=8$

(4) $3x^2-x-2=5(1-x)$

생각 3 이차방정식의 해가 중복되어 있는 경우가 있나요?

이차방정식 $x^2-10x+25=0$을 풀어 보자.

좌변을 인수분해하면

$(x-5)^2=0$

이다. 그런데 이 식은 $(x-5)(x-5)=0$과 같으므로

$x-5=0$ 또는 $x-5=0$

이다.

따라서 이차방정식 $x^2-10x+25=0$의 해는

$x=5$ 또는 $x=5$

로 서로 같다.

(완전제곱식)=0의 꼴로 나타낼 수 있는 이차방정식은 중근을 갖는다.

이와 같이 이차방정식의 해가 중복되어 있을 때, 이 해를 주어진 이차방정식의 **중근**이라고 한다. 즉, $x=5$는 이차방정식 $x^2-10x+25=0$의 중근이다.

예제 3 이차방정식 $x^2-4x+4=4(x-3)$을 푸시오.

풀이 | 괄호를 풀면 $x^2-4x+4=4x-12$

모든 항을 좌변으로 이항하여 정리하면 $x^2-8x+16=0$

좌변을 인수분해하면 $(x-4)^2=0$

$x-4=0$ 또는 $x-4=0$

따라서 $x=4$는 주어진 이차방정식의 중근이다.

확인 | $x=4$를 $x^2-4x+4=4(x-3)$에 대입하면 (좌변)=(우변)이므로

$x=4$는 주어진 이차방정식의 해이다.

답 $x=4$

문제 4 다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x^2-6x+9=0$

(2) $x(x+8)=-16$

(3) $4x^2+9=-12x$

(4) $2(3-2x)=2-x^2$

생각을 나누는 의사소통

오른쪽은 수빈이가 이차방정식 $(x+3)(x-4)=x+3$의 해를 구한 것이다. 잘못된 부분을 찾아 바르게 고치고, 왜 그렇게 고쳤는지 말해 보자.

수학 집 짓기

이 시간에 배운 내용

스스로 해결하기

1

다음 [ ] 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

(1) $ax^2+bx+c=0$의 꼴로 정리한 이차방정식의 좌변을 두 일차식 A와 B의 곱으로 인수분해할 수 있는 경우, $AB=0$이면 [ ] 또는 [ ]임을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있다.

(2) 이차방정식의 해가 중복되어 있을 때, 이 해를 이차방정식의 [ ]이라고 한다.

2

다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x(x-3)=0$　(2) $(x+2)(x-2)=0$

(3) $(x+7)(x-6)=0$　(4) $(3x+4)(2x-1)=0$

3

다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x^2+5x=0$　(2) $9x^2-16=0$

(3) $x^2-4x-12=0$　(4) $2x^2-5x-3=0$

4

다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x(x+1)=2$　(2) $5x^2-3=5-6x$

(3) $(x+4)(x-4)=6x$　(4) $(x-2)(x-6)=-3$

5

다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $2(3x-4)^2=0$　(2) $4x^2=20x-25$

(3) $x(x-14)=-49$　(4) $(x+3)^2=2x+5$

6

다음 이차방정식이 중근을 가질 때, 양수 k의 값과 중근을 차례로 구하시오.

(1) $x^2-10x+k=0$　(2) $x^2+2kx+64=0$

(3) $4x^2-8x+k=0$　(4) $x^2+12x+k+2=0$

7 추론

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 중근이 $x=-4$일 때, $\frac{b}{a}$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수)

8 과정을 다지는 문제

두 이차방정식 $x^2-7x+10=0$, $x^2+5x-14=0$을 동시에 만족시키는 해를 구하고, 그 풀이 과정을 쓰시오.

3.3 제곱근을 이용한 이차방정식의 풀이

학|습|목|표

• 제곱근을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있다.

생각 열기

원목의 가공

나무는 인류의 생존을 위해서는 없어서는 안 될 소중한 자원입니다. 특히, 주택, 가구, 종이 등 현대인의 생활과도 밀접한 관계를 가지고 있습니다. 한옥 집을 짓기 위해 건조와 보존 처리를 한 원목을 오른쪽 그림과 같이 단면이 정사각형 모양이 되도록 가장자리를 잘라 냈습니다. 이때 단면의 넓이가 430 cm^2인 정사각형의 한 변의 길이를 구하는 방법을 생각해 봅시다.

430 cm^2

활동 1 정사각형의 한 변의 길이를 x cm로 놓고 방정식을 세워 보자.

활동 2 정사각형의 한 변의 길이를 구해 보자.

생각 1 **넓이가 주어진 정사각형의 한 변의 길이는 어떻게 구할 수 있나요?**

생각 열기에서 넓이가 430 cm^2인 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라고 하면

$$x^2=430$$

이다. 이 식을 참이 되게 하는 x의 값은 430의 제곱근이므로 해는

$$x=\sqrt{430} \text{ 또는 } x=-\sqrt{430}$$

이다. 그런데 $x>0$이므로 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{430}$ cm이다.

일반적으로 이차방정식

$$ax^2+c=0\ (a\neq0,\ ac\leq0)$$

은 $x^2=k\ (k\geq0)$의 꼴로 고친 다음 k의 제곱근을 이용하여 풀 수 있다.

이때 해는 $x=\sqrt{k}$ 또는 $x=-\sqrt{k}$이다.

'$x=\sqrt{k}$ 또는 $x=-\sqrt{k}$'를 간단히 $x=\pm\sqrt{k}$와 같이 나타내기도 한다.

예 이차방정식 $4x^2-25=0$에서 좌변의 -25를 우변으로 이항하면 $4x^2=25$

양변을 4로 나누면 $x^2=\frac{25}{4}$

x는 $\frac{25}{4}$의 제곱근이므로 $x=\pm\sqrt{\frac{25}{4}}=\pm\frac{5}{2}$

문제 1 다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $2x^2=8$

(2) $16x^2=25$

(3) $9x^2-5=0$

(4) $27x^2-18=0$

예제 1

다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $(x+2)^2=7$

(2) $2(x-1)^2-10=0$

풀이 | (1) $x+2$는 7의 제곱근이므로 $x+2=\pm\sqrt{7}$

좌변의 2를 우변으로 이항하면 $x=-2\pm\sqrt{7}$

(2) 좌변의 -10을 우변으로 이항하고, 양변을 2로 나누면 $(x-1)^2=5$

$x-1$은 5의 제곱근이므로 $x-1=\pm\sqrt{5}$

좌변의 -1을 우변으로 이항하면 $x=1\pm\sqrt{5}$

답 (1) $x=-2\pm\sqrt{7}$ (2) $x=1\pm\sqrt{5}$

문제 2 다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $(x-2)^2=4$

(2) $(x-4)^2-6=0$

(3) $4(x+2)^2=3$

(4) $(2x-1)^2-11=0$

생각 2 완전제곱식을 이용하여 이차방정식을 어떻게 풀 수 있나요?

이차방정식 $x^2+bx+c=0$의 좌변이 인수분해되지 않을 때에는 완전제곱식을 이용할 수 있다.

이차방정식 $x^2+bx+c=0$의 좌변을 완전제곱식으로 고쳐서 정리하면

$$(x-p)^2=k\ (k\geq 0)$$

의 꼴로 나타낼 수 있다.

이때 해는 $x=p\pm\sqrt{k}$이다.

예제 2

이차방정식 $x^2-6x-2=0$을 푸시오.

풀이 | $x^2-6x-2=0$에서 좌변의 -2를 우변으로 이항하면 $x^2-6x=2$

좌변을 완전제곱식으로 만들기 위해 x의 계수 -6의 $\frac{1}{2}$의 제곱인 9를 양변에 더하면 $x^2-6x+9=2+9$

좌변을 완전제곱식으로 나타내고, 우변의 식을 계산하면 $(x-3)^2=11$

$x-3$은 11의 제곱근이므로 $x-3=\pm\sqrt{11}$

좌변의 -3을 우변으로 이항하면 $x=3\pm\sqrt{11}$

답 $x=3\pm\sqrt{11}$

문제 3 다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x^2-4x+1=0$ (2) $x^2+2x-5=0$

(3) $x^2-3x+1=0$ (4) $x^2=x+1$

생각을 나누는 의사소통

다음은 지원이와 민재가 방정식 $(x+2)^2-9=0$을 푸는 과정의 일부이다. 지원이와 민재의 방법으로 각각 풀어 보고, 두 사람의 풀이 방법을 비교하여 친구와 이야기해 보자.

〈지원이의 풀이〉	〈민재의 풀이〉
$(x+2)^2-9=0$	$(x+2)^2-9=0$
$x^2+4x-5=0$	$(x+2)^2=9$
⋮	⋮

동료 평가

- 친구는 지원이와 민재의 방법으로 각각 풀어 보았는가?
- 친구는 내가 비교하여 말한 것을 잘 경청하였는가?

수학 집 짓기

제곱근을 이용한 이차방정식의 풀이

$x^2=k\ (k\geq 0)$

$x=\pm\sqrt{k}$

x는 k의 제곱근

완전제곱식을 이용한 이차방정식의 풀이

$(x-p)^2=k\ (k\geq 0)$

$x-p=\pm\sqrt{k}$

$x=p\pm\sqrt{k}$

$x-p$는 k의 제곱근

좌변의 $-p$를 이항

이 시간에 배운 내용

스스로 해결하기

1

다음 ☐ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

> 이차방정식 $x^2+bx+c=0$은 좌변을 ☐으로 고쳐서 정리하면 $(x-p)^2=k$ $(k\geq0)$의 꼴로 나타낼 수 있다.

2

다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x^2=7$　　(2) $3x^2=24$

(3) $(x+1)^2=12$　　(4) $2(x-3)^2-10=0$

3

다음은 완전제곱식을 이용하여 이차방정식 $x^2+10x-8=0$을 푸는 과정이다. ☐ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

> $x^2+10x-8=0$
>
> $x^2+10x=$☐
>
> x^2+10x+☐$=8+$☐
>
> $(x+$☐$)^2=$☐
>
> $x+$☐$=\pm\sqrt{☐}$
>
> 따라서 $x=$☐

4

이차방정식 $x^2-5x=3$을 $(x+a)^2=b$의 꼴로 나타낼 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수)

5

다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x^2-2x-1=0$　　(2) $x^2-12x+5=0$

(3) $x^2+3x-5=0$　　(4) $x^2+5x+3=0$

6 추론

이차방정식 $x^2+ax+b=0$을 제곱근을 이용하여 풀었더니 해가 $x=-2\pm\sqrt{3}$이었다. 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

7 과정을 다지는 문제

한 변의 길이가 x cm인 정사각형이 있다. 이 정사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 3 cm씩 늘였더니 넓이가 50 cm^{2}인 정사각형이 되었다. 처음 정사각형의 한 변의 길이를 구하고, 그 풀이 과정을 쓰시오.

3 cm
x cm
x cm
3 cm

3.4 근의 공식을 이용한 이차방정식의 풀이

학|습|목|표

- 이차방정식의 근의 공식을 이해한다.
- 근의 공식을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있다.
- 이차방정식을 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

학|습|요|소

- 근의 공식

생각 열기

이차방정식의 근을 구하는 식이 있을까?

다음을 보고, 이차방정식의 근을 구하는 식에 대하여 생각해 봅시다.

활동 1 다음은 이차방정식 $3x^2-4x-2=0$의 좌변을 완전제곱식으로 고치는 과정을 설명한 것이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어 보자.

x^2의 계수가 1이 되도록 양변을 3으로 나눈다.	$x^2-\frac{4}{\square}x-\frac{2}{\square}=0$
좌변의 상수항을 우변으로 이항한다.	$x^2-\frac{4}{3}x=\square$
x의 계수의 $\frac{1}{2}$을 제곱한 값을 양변에 더한다.	$x^2-\frac{4}{3}x+\square=\frac{2}{3}+\square$
좌변을 완전제곱식으로 만들고 우변을 정리한다.	$\left(x-\square\right)^2=\frac{10}{9}$

생각 1

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근을 어떻게 구할 수 있나요?

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근을 구하는 식을 완전제곱식을 이용하여 찾아보자.

	$ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$
양변을 x^2의 계수 a로 나눈다.	$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$
좌변의 상수항을 우변으로 이항한다.	$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$

x의 계수의 $\frac{1}{2}$을 제곱한 값 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$을 양변에 더한다.	$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$
좌변을 완전제곱식으로 만들고 우변을 정리한다.	$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$
$b^2-4ac\geq0$일 때, 제곱근을 구한다.	$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$
이차방정식의 근을 구한다.	$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

위의 결과에서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근을 구하는 식을 세 상수 a, b, c를 이용하여 나타낼 수 있음을 알았다. 이 식을 이차방정식의 **근의 공식**이라고 한다.

이차방정식의 근의 공식

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$의 근은

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad (\text{단, } b^2-4ac\geq0)$$

예제 1

이차방정식 $3x^2-4x-2=0$을 근의 공식을 이용하여 푸시오.

풀이 | 근의 공식에 $a=3$, $b=-4$, $c=-2$를 대입하면

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times3\times(-2)}}{2\times3}$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{16+24}}{6}=\frac{4\pm2\sqrt{10}}{6}=\frac{2\pm\sqrt{10}}{3}$$

답 $x=\frac{2\pm\sqrt{10}}{3}$

문제 1 다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x^2+x-3=0$

(2) $2x^2-5x+1=0$

(3) $3x^2+11x-4=0$

(4) $9x^2+6x=1$

상수항도 계수로 본다.

계수에 분수 또는 소수가 있는 이차방정식은 양변에 적당한 수를 곱하여 분수 또는 소수를 정수로 바꾼 후에 풀면 편리하다.

예제 2

이차방정식 $\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{3}=0$을 푸시오.

풀이 | 양변에 분모 2와 3의 최소공배수 6을 곱하면 $3x^2-6x+2=0$이므로

근의 공식에 $a=3$, $b=-6$, $c=2$를 대입하면

$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\times3\times2}}{2\times3}$$

$$=\frac{6\pm\sqrt{12}}{6}=\frac{6\pm2\sqrt{3}}{6}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$$

답 $x=\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$

문제 2 다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}=0$

(2) $\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x-\frac{1}{6}=0$

(3) $0.1x^2-0.6x+0.5=0$

(4) $0.3x^2-x=0.7$

생각 2 이차방정식을 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있나요?

이차방정식을 활용하여 문제를 해결할 때에는 주어진 문제 상황에서 무엇을 미지수로 놓을지 결정하고, 문제 중에 있는 수량들 사이의 관계를 이차방정식으로 나타내어 푼다. 주어진 문제를 다음 순서 ❶, ❷, ❸, ❹에 따라 해결해 보자.

연속하는 두 자연수의 제곱의 합이 113일 때, 두 자연수를 구하시오.

❶ 미지수 x 결정하기 ↓ ❷ 이차방정식으로 나타내기 ↓ ❸ 이차방정식 풀기 ↓ ❹ 확인하기

❶ 문제의 뜻을 파악하고 미지수를 결정한다.	연속하는 두 자연수 중 작은 수를 x라고 하자.
❷ 수량 사이의 관계를 찾아 이차방정식으로 나타낸다.	연속하는 두 자연수 중 큰 수는 $x+1$이고, 두 수의 제곱의 합이 113이므로 $x^2+(x+1)^2=113$이다.
❸ 이차방정식을 푼다.	$x^2+x-56=0$이므로 좌변을 인수분해하면 $(x+8)(x-7)=0$에서 $x=-8$ 또는 $x=7$ 이때 $x>0$이므로 $x=7$이다. 따라서 연속하는 두 자연수는 7, 8이다.
❹ 구한 해가 문제의 뜻에 맞는지 확인한다.	연속하는 두 자연수가 7, 8일 때, 두 자연수의 제곱의 합은 $7^2+8^2=49+64=113$이므로 구한 해가 문제의 뜻에 맞는다.

문제 3 연속하는 두 짝수의 곱이 168일 때, 두 짝수를 구하시오.

문제 4 오른쪽 그림과 같이 정사각형 모양의 종이의 네 귀퉁이에서 한 변의 길이가 4 cm인 정사각형 모양을 잘라 내어 뚜껑이 없는 직육면체 모양의 선물 상자를 만들었더니 부피가 400 cm^3가 되었다. 처음 정사각형 모양의 종이의 한 변의 길이를 구하시오.

4 cm
4 cm

문제 5 오른쪽 그림과 같이 어느 미술관에 걸린 직사각형 모양의 그림의 가로와 세로의 길이의 비가 3 : 2이고, 대각선의 길이가 40 cm이다. 이 그림의 가로의 길이를 구하시오.

40 cm

예제 3

서현이네 학교는 과학의 날 행사에서 물 로켓 발사 대회를 하였다. 물 로켓을 초속 30 m로 지면에서 수직으로 쏘아 올릴 때, x초 후의 높이는 $(-5x^2+30x)$ m라고 한다. 이 물 로켓을 쏘아 올린 후 땅에 떨어질 때까지 걸리는 시간을 구하시오.

풀이 | 땅에 떨어질 때까지 걸리는 시간을 x초라고 하면
물 로켓이 땅에 떨어졌을 때 높이가 0 m이므로 $-5x^2+30x=0$
양변을 -5로 나누면 $x^2-6x=0$
좌변을 인수분해하면 $x(x-6)=0$이므로
$x=0$ 또는 $x=6$
이때 $x>0$이므로 $x=6$
따라서 물 로켓이 땅에 떨어질 때까지 걸리는 시간은 6초이다.

확인 | 6초 후의 물 로켓의 높이는 $-5\times6^2+30\times6=-180+180=0$ (m)이므로 구한 해가 문제의 뜻에 맞는다.

답 6초

문제 6 불꽃 축제에서 폭죽을 초속 60 m로 지면에서 수직으로 쏘아 올릴 때, x초 후의 높이는 $(-5x^2+60x)$ m가 된다고 한다. 이 폭죽이 올라가면서 160 m 높이의 지점에서 터졌다면 쏘아 올린 지 몇 초 후에 터진 것인지 구하시오.

생각을 나누는 의사소통

이차방정식을 활용하여 문제를 풀 때, 무엇을 미지수로 하는가에 따라 이차방정식의 풀이 과정이 어떻게 달라지는지 다음 문제를 예로 하여 친구와 이야기해 보자.

동료 평가

- 친구는 지민이와 준서의 방법으로 각각 풀어 보았는가?
- 친구는 나의 설명을 잘 경청하였는가?

지민: 연속하는 두 자연수 중 작은 수를 x라고 하면 ….

수학 책을 펼쳤을 때, 양쪽 면의 두 쪽수의 곱이 600일 때, 두 쪽수를 구하시오.

준서: 연속하는 두 자연수 중 큰 수를 x라고 하면 ….

수학 집 짓기

근의 공식을 이용한 이차방정식의 풀이

이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$의 근

근의 공식

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ (단, b^2-4ac\geq 0)$$

이 시간에 배운 내용

스스로 해결하기

1

다음 ☐ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

> 이차방정식 $ax^2+bx+c=0\,(a\neq0)$의 근은
>
> $x=$ ☐ (단, ☐ ≥ 0)
>
> 이며, 이 식을 이차방정식의 ☐이라고 한다.

2

다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x^2=4(x+2)$

(2) $(2x+1)(3x-2)=5x$

(3) $x^2+\frac{3}{2}x=-\frac{1}{6}$

(4) $0.5x^2-0.2=\frac{1}{2}x$

3

이차방정식 $(x-2)(x+3)=-5x-4$의 해가 $x=A\pm\sqrt{B}$일 때, $A+B$의 값을 구하시오.

4

연속하는 세 자연수가 있다. 가장 큰 수의 제곱이 다른 두 수의 곱의 2배보다 31만큼 더 작다고 할 때, 가장 큰 자연수를 구하시오.

5

오른쪽 그림과 같은 삼각형이 직각삼각형이 되기 위한 x의 값을 구하시오. (단, 가장 긴 변의 길이는 $2x+1$이다.)

$2x+1$
$x+4$
$x+3$

6

어느 농구 선수가 골대를 향해 던진 농구공의 t초 후의 높이가 $(-5t^2+9t+2)$ m라고 할 때, 이 농구공이 땅에 떨어지는 것은 농구공을 던진 지 몇 초 후인지 구하시오.

7 추론

현경이와 희재의 생일은 모두 6월이고, 희재가 현경이보다 2주가 더 늦다고 한다. 두 사람의 생일의 날짜를 곱하면 176이 된다고 할 때, 두 사람의 생일은 각각 언제인지 구하시오.

8 과정을 다지는 문제

오른쪽 그림과 같이 길이가 10 cm인 $\overline{AB}$ 위에 점 P를 잡아 $\overline{AP}$와 $\overline{BP}$를 각각 한 변으로 하는 정사각형을 만들었다. 두 정사각형의 넓이의 합이 52 cm^2일 때, $\overline{AP}$의 길이를 구하고, 그 풀이 과정을 쓰시오.

(단, $\overline{AP}>\overline{BP}$)

A P B
10 cm

수학 놀이터

이차방정식을 풀어 숨은그림찾기

● 다음 이차방정식을 풀고, 그 해와 짝 지어진 물건을 아래 그림에서 찾아보자.

문제	해	물건
1. $4x^2-25=0$	$x=\pm\frac{5}{2}$	수첩
	$x=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$	가위
2. $x^2-5x+6=0$	$x=2$ 또는 $x=3$	연필
	$x=1$ 또는 $x=6$	바늘
3. $(2x-1)^2+4(2x-1)=12$	$x=\frac{3}{2}$ 또는 $x=-\frac{5}{2}$	안경
	$x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=\frac{5}{2}$	망원경
4. $(x-5)^2-3=0$	$x=-5\pm\sqrt{3}$	접시
	$x=5\pm\sqrt{3}$	야구공
5. $3x^2+4x-2=0$	$x=\frac{-2\pm2\sqrt{5}}{3}$	프라이팬
	$x=\frac{-2\pm\sqrt{10}}{3}$	파리채
6. $0.2x^2-x+0.7=0$	$x=\frac{-5\pm\sqrt{11}}{2}$	야구 글러브
	$x=\frac{5\pm\sqrt{11}}{2}$	야구 방망이

집중 탐구

그림을 이용한 이차방정식의 풀이

아라비아 수학자 알콰리즈미(Al−Khwarizmi, 780?~850?)는 이차방정식을 그림을 이용하여 푸는 방법을 고안해 내었다. 그가 이차방정식 $x^2+10x=39$의 해를 구한 방법을 알아보자.

❶ 이차방정식 $x^2+10x=39$를 한 변의 길이가 x인 정사각형과 가로의 길이가 10, 세로의 길이가 x인 직사각형을 이용하여 그림으로 나타내면 다음과 같다.

x, 10, x, x^2, $10x$

$x^2+10x=39$

❷ 넓이가 $10x$인 직사각형을 이등분하여 넓이가 x^2인 정사각형의 이웃한 두 변에 각각 붙인 후 큰 정사각형을 만든다.

x, 5, x, x^2, $5x$, 5, $5x$ → x, 5, x, x^2, $5x$, 5, $5x$, 25

$x^2+10x+25=39+25$

$(x+5)^2=64$

$x+5=8$

$x=3$

알콰리즈미는 그림을 이용하여 이차방정식을 풀었기 때문에 양수만을 이차방정식의 해로 다루었지요. 하지만 현재는 음수인 해도 구하므로 64의 제곱근은 ±8이 되어 $x=3$ 또는 $x=-13$이 모두 이차방정식 $x^2+10x=39$의 해가 됨을 알 수 있어요.

확인

이차방정식 $x^2+8x=33$의 양수인 해를 구하는 과정을 그림을 이용하여 설명해 보자.

단원 마무리

01

다음 보기에서 이차방정식인 것을 모두 고르시오.

보기
ㄱ. $2x^2=(x-3)^2$
ㄴ. $2x(x+1)=3+2x^2$
ㄷ. $(x-2)(x+3)$
ㄹ. $3x^2-x-4=2x^2-1$

02

$ax^2-3x+2=4x(x-1)$이 x에 관한 이차방정식이 되기 위한 상수 a의 값의 조건을 구하시오.

03

이차방정식 $(x+1)(x-3)=-5x+2$를 $x^2+px+q=0$의 꼴로 나타낼 때, 상수 p, q의 값을 각각 구하시오.

04

x의 값이 0, 1, 2, 3, 4일 때, 이차방정식 $x^2-4x+3=0$의 해를 모두 구하시오.

05

다음 이차방정식을 푸시오.

(1) $x^2+5x-6=0$
(2) $x(x-5)=x$
(3) $6x^2+x-2=0$
(4) $(x-4)(x-7)=-2$

06

이차방정식 $2x^2+5x+k=0$의 한 근이 $x=-1$일 때, 다른 한 근을 구하시오. (단, k는 상수)

07 서술형

이차방정식 $x^2-3x-18=0$의 두 근 중 음수인 근을 $x=a$라고 할 때, 이차방정식 $x^2-(a-1)x+2a+5=0$을 푸시오. (단, 풀이 과정을 자세히 쓰시오.)

08

다음 보기의 이차방정식 중에서 중근을 가지는 것을 모두 고르시오.

보기
ㄱ. $x^2-6x+8=0$
ㄴ. $\frac{1}{4}x^2-x+1=0$
ㄷ. $x^2+2x-1=0$
ㄹ. $0.9x^2+3x+2.5=0$

09

이차방정식 $x^2+2(2m-1)x+9=0$이 중근을 갖도록 하는 양수 m의 값을 구하시오.

10

오른쪽 그림과 같이 $\angle C=90°$인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=4\sqrt{5}$, $\overline{BC}=a+4$, $\overline{CA}=a$일 때, a의 값을 구하시오.

A
$4\sqrt{5}$
a
B
$a+4$
C

11

이차방정식 $x^2+8x+1=0$을 $(x+m)^2=n$의 꼴로 나타낼 때, 상수 m, n의 값을 각각 구하시오.

12 서술형

이차방정식 $(x+3)^2=5$의 해 중 일차부등식 $x+5<3x+7$을 만족시키는 해를 구하시오. (단, 풀이 과정을 자세히 쓰시오.)

13

이차방정식 $x^2+mx-2=0$의 해가 $x=\frac{3\pm\sqrt{n}}{2}$일 때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, m은 상수)

14

어떤 수 x에 5를 더하여 제곱해야 할 것을 잘못하여 x에 5를 더하여 2배를 하였는데 그 결과가 같았다. 이때 x의 값을 모두 구하시오.

15

야구 경기에서 어느 타자가 친 야구공의 t초 후의 높이를 $(-5t^2+25t+1)$ m라고 하자. 이 야구공이 처음으로 지상으로부터 높이가 21 m인 지점을 지날 때는 야구공을 친 지 몇 초 후인지 구하시오.

16

오른쪽 그림과 같이 가로의 길이가 30 m이고, 세로의 길이가 24 m인 직사각형 모양의 정원에 폭이 일정한 십자 모양의 길을 만들려고 한다. 길을 제외한 정원의 넓이가 520 m^2가 되도록 하려면 길의 폭을 얼마로 해야 하는지 구하시오.

30 m
24 m

문제 해결

17

오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 9 cm인 원 모양의 피자 반죽에서 반지름의 길이를 약간 늘였더니 넓이가 처음 원의 넓이보다 $63\pi\,\text{cm}^2$ 만큼 더 넓어졌다. 반지름의 길이를 몇 cm만큼 늘였는지 구하시오.

9 cm

18

오른쪽 그림에서 점 Q는 점 A를 출발하여 점 B까지 일차함수 $y=-2x+16$의 그래프를 따라 움직이고 있다. 점 Q에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 P, R라고 할 때, □OPQR의 넓이가 24가 되게 하는 점 P의 좌표를 모두 구하시오.

y A $y=-2x+16$ R Q B O P x

창의 UP

19

한 변의 길이가 12 m인 정사각형 모양의 공간을 오른쪽 그림과 같이 나누어 사용하려고 한다. 사무실, 회의실, 다목적실은 각각 정사각형 모양이고, 화장실과 현관의 넓이를 합하면 18 m^2일 때, 직사각형 모양인 휴식 공간의 넓이를 구하시오.

사무실 다목적실 휴식 공간 회의실 현관 화장실

자기 평가

점검 항목		도달 정도		
		미흡	보통	우수
학습 내용	이차방정식의 뜻을 알고, 그 해를 구할 수 있는가?			
	인수분해를 이용하여 이차방정식을 풀 수 있는가?			
	제곱근을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있는가?			
	근의 공식을 이용하여 이차방정식을 풀 수 있는가?			
	이차방정식을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?			
학습 태도	수업 시간에 성실히 참여하였는가?			
	문제를 풀 때 끈기 있게 도전하였는가?			
	복습과 예습을 꼼꼼히 하였는가?			
	친구의 의견을 존중하고 경청하였는가?			

● 이 단원을 공부하면서 알게 된 점과 어려웠던 점은 무엇인지 써 보자.

창의+융합 프로젝트

황금사각형을 이용한 작품 만들기

수학+미술

두 변의 길이가 황금비를 이루는 직사각형을 황금사각형이라고 한다. 오른쪽 그림의 □ABCD에서 $x>1$일 때, $1:x=x:(1+x)$가 성립하면 □ABCD는 황금사각형이 된다. 황금사각형과 서로 닮은 도형은 모두 황금사각형이다.

따라서 오른쪽 그림에서 □ABCD가 황금사각형이면 □ADFE는 황금사각형이 된다. 또, □ADFE가 황금사각형이면 □ABCD는 황금사각형이 된다. 다음 활동을 통해 황금사각형을 이용한 작품을 만들어 보자.

A D B C E F x 1 x

1 닮은 도형의 성질을 이용하여 황금사각형의 짧은 변의 길이를 1이라고 할 때, 긴 변의 길이를 구해 보자.

2 정사각형과 피타고라스 정리를 이용하여 황금사각형을 작도해 보자.

1 1

3 황금사각형을 찾을 수 있는 예술 작품이나 건축물의 예를 조사해 보고, 황금사각형을 이용한 작품을 만들어 보자.

과제

포트폴리오 평가

• 이 단원을 학습한 후 스스로 해결하기 및 단원 마무리 문제 해결, 자기 평가 작성, 창의+융합 프로젝트 과제 해결 등 모든 활동 결과를 확인하고 점검하였는가?

Credit Card
1234 5678 9102 3
00/00 00/00
CARD R HOLDER